HW $y^{n+1} = y^n + h\cdot(a_1 f(t^n, y^n) + a_2 f(t^{n-1}, y^{n-1}))$ 5/12/19

a_1, a_2 ?

Αναπτ. Taylor : $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^1)$

(με Taylor να παίρνω μ. Τραπεζίου) $y(t^{n+1})|_{t^n} = y(t^n) + hf(t^n, y^n) + O(h^2)$

Θέλω Αναπτ. ώστε να έχω $f(t^{n+1}, y^{n+1})$

Στον **R-K** :

$y^{n,i}$: ενδιάμεσα στάδια της μεθόδου

1η περίπτ. : Ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, δηλ. $a_{ij} = 0$, $j = i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

τότε η R-K γράφεται στη μορφή:

$$y^0 = y_0$$

$$y^{n,1} = y^n$$

$$y^{n,2} = y^{n,1} + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

$$y^{n,3} = y^{n_0} + h(a_{31} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + a_{32} f(t^{n,2}, y^{n,2}))$$

$$\vdots$$

$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{qj} \cdot f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Τελικά: $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$

Εδώ τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, χωρίς να χρειάζεται επίλυση ενός αλγεβρ. συστήματος. Τότε η R-K είναι άμεση.

2η περίπτ. : Ο $A=(a_{ij})$ δεν είναι γνήσια κάτω τριγωνικός. Τότε η R-K που προκύπτει είναι πεπλεγμένη

Π.χ. • Πεπλεγμένη Euler : $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

Εδώ $q=1$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n,1}) \\ \quad t^{n,1} = t^n + c_1 h = t^n + h = t^{n+1} \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$$

$\Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$ (το εσωτερικό βήμα συμπίπτει με το κύριο βήμα)

Τελικά: $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$: πεπλ. Euler

• $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ $(q=1)$ Μέθοδος μέσου

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad (1) \\ \quad \text{όπου } t^{n,1} = t^n + c_1 h = t^n + \frac{h}{2} = t^{n+1/2} \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \Rightarrow \underset{(2)}{f(t^{n+\frac{1}{2}}, y^{n,1}) = \frac{y^{n+1}-y^n}{h}} \end{cases}$$

$(1) \xrightarrow{(2)} y^{n,1} = y^{n+1} + \frac{y^n}{2}$

Άρα $y^{n+1} = y^n + hf\left(t^{n+\frac{1}{2}}, y^{n+1} + \frac{y^n}{2}\right)$: του μέσου